

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

5.1. Основные определения и законы

Инерциальная система отчета K' движется относительно неподвижной системы отчета K со скоростью $v_0 \approx c$ таким образом, что оси y, y' и z, z' сона-

правлены, а v_0 сонаправлена с общей осью xx' (рис. 5.1). Между координатами системы отчета K' и K , есть взаимосвязь (преобразования Лоренца):

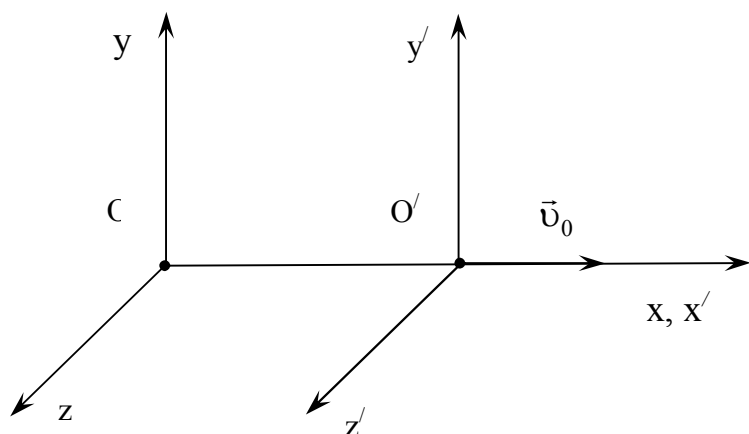


Рис. 5.1

$$x = \frac{x' + v_0 t'}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}};$$

$$y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + v_0 x'/c^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}.$$

Релятивистское (лоренцево) сокращение длины стержня:

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad (5.1)$$

где ℓ_0 - длина стержня в системе координат К, относительно которой стержень покоится (собственная длина). Стержень параллелен оси x' , ℓ - длина стержня, измеренная в системе К, относительно которой он движется со скоростью v ; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с - скорость света в вакууме.

Релятивистское замедление хода часов:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \quad (5.2)$$

где Δt_0 - интервал времени между двумя событиями, происходящими в одной точке системы К', измеренный по часам этой системы (собственное время движущихся часов); Δt - интервал времени между двумя событиями, измеренный по часам системы К.

Релятивистское сложение скоростей:

$$v = \frac{v' + v_0}{1 + v_0 v'/c^2}, \quad (5.3)$$

где v' — относительная скорость (скорость тела относительно системы К'); v_0 - переносная скорость (скорость системы К' относительно К), v_0 - абсолютная скорость (скорость тела относительно системы К).

В теории относительности абсолютной скоростью называется скорость тела в системе координат, условно принятой за неподвижную.

Релятивистская масса:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (5.4.)$$

Релятивистский импульс:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (5.5)$$

Полная энергия релятивистской частицы:

$$E = mc^2 = m_0 c^2 + T, \quad (5.6.)$$

где T - кинетическая энергия частицы; $E = m_0 c^2$ - ее энергия покоя.

Связь полной энергии с импульсом релятивистской частицы:

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4. \quad (5.7)$$

Связь кинетической энергии с импульсом релятивистской частицы:

$$p^2 c^2 = T(T + 2m_0 c^2). \quad (5.8)$$

5. 2. Примеры решения задач по релятивистской механике

5.1. Система отсчета «ракета» движется вдоль оси Ox инерциальной оси отсчета «Земля» с постоянной скоростью $v = 2 \cdot 10^8 \text{ м/с}$. В системе отсчета земля расположен стержень длиной $\ell_0 = 1 \text{ м}$ под углом $\alpha_0 = 45^\circ$ к оси Ox . Найти длину стержня и угол наклона его оси $O'x'$ в системе отсчета «ракета». Оси Ox и $O'x'$ параллельны.

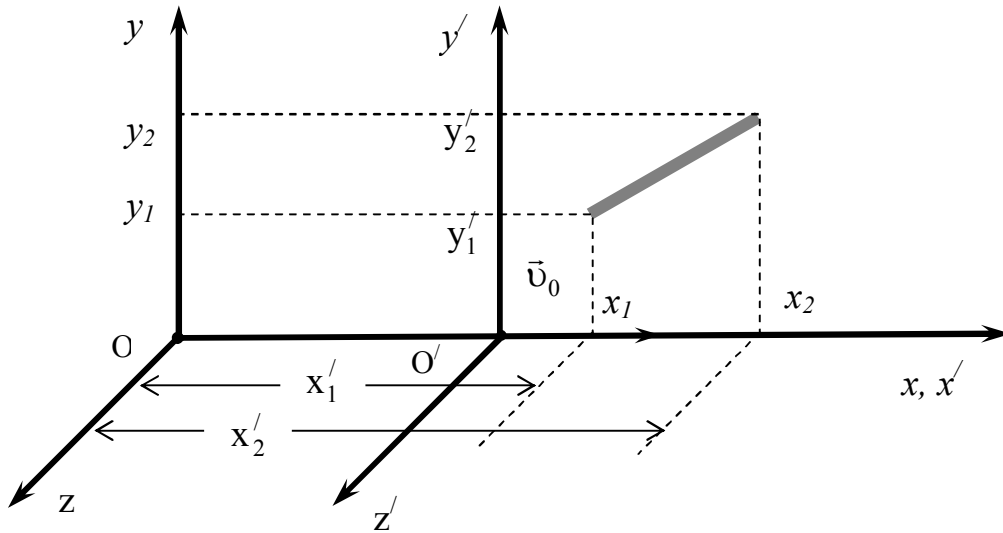


Рис. 5.2

Длина стержня в системе отсчета «Земля» и «ракета» равна соответственно

$$\ell_0 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}; \quad (1)$$

$$\ell = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2}. \quad (2)$$

Эффект сокращения длины проявляется только в направлении движения, то согласно преобразованиям Лоренца $y'_1 = y_1$, $z'_1 = z_1$ и

$$x'_1 = x_1 \sqrt{1 - v^2/c^2}; \quad (3)$$

$$x'_2 = x_2 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (4)$$

Подставив (3), (4) в (2) получим

$$\ell = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 (1 - v^2/c^2) + (y_2 - y_1)^2}. \quad (5)$$

Из рис.5.2 видно, что

$$x_2 - x_1 = \ell_0 \cos \alpha_0, \quad y_2 - y_1 = \ell_0 \sin \alpha_0. \quad (6)$$

Тогда

$$\ell = \ell_0 \sqrt{(1 - v^2/c^2) \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \ell_0 \sqrt{1 - v^2/c^2 \cos^2 \alpha} \approx 0,88 \ell_0, \quad (7)$$

а искомый угол

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1} = \operatorname{arctg} \frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1)\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \alpha_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 53,3^\circ.$$

Ответ: $\ell \approx 0,88 \text{ м}$; $\alpha \approx 53,3^\circ$.

5.2. Сколько времени для земного наблюдателя и для космонавтов займет космическое путешествие до звезды и обратно на ракете, летящей со скоростью $v = 2,9 \cdot 10^8 \text{ м/с}$? Расстояние до звезды (для земного наблюдателя) равно 40 световым годам.

Решение.

Расстояние S , которое пролетит космический корабль в системе отчета, связанной с Землей, равно $S = 2,9 \cdot 10^8 \text{ м/с} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \approx 3,8 \cdot 10^{17} \text{ м}$. Следовательно, по часам земного наблюдателя полет корабля продлится $\Delta t = 2S/v \approx 83 \text{ года}$.

Время, измеренное по часам, находящимся на борту космического корабля, в соответствии с эффектом замедления времени $\Delta t_0 = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2}$, или

$$\Delta t_0 = \frac{2S\sqrt{1 - v^2/c^2}}{v} \approx 21,3 \text{ года}.$$

Ответ: $\Delta t \approx 83 \text{ года}$; $\Delta t_0 \approx 21,3 \text{ года}$.

5.3. В системе отсчета K два параллельных стержня имеют одинаковую собственную длину $\ell_0 = 1 \text{ м}$ и движутся в продольном направлении навстречу друг к другу с равными скоростями $v = 2 \cdot 10^8 \text{ м/с}$, измеренным в этой системе отсчета. Чему равна длина каждого стержня в системе отсчета, связанной с другим стержнем?

Решение.

Для неподвижного наблюдателя при движении протяженных тел с большими скоростями их размеры в направлении движения существенно сокращаются. Свяжем систему отсчета K' с одним из стержней, направив одну из осей вдоль стержня. Тогда в этой системе отсчета стержень 1 будет находиться в по-

кое и его длина равна собственной длине $\ell_0 = 1 \text{ м}$. Длина ℓ стержня 2 относительно системы отсчета K' : $\ell = \ell_0 \sqrt{1 - v_{\text{отн}}^2 / c^2}$, где $v_{\text{отн}}$ - скорость стержня 2 относительно системы K' .

Скорость $v_{\text{отн}}$ можно найти по формуле сложения скоростей

$$v_{\text{отн}} = \frac{v_{x'} + v_0}{1 + v_0 v_{x'} / c^2}.$$

Поскольку система отчета K' связана с одним из стержней, то скорость v_0 движения системы отсчета K относительно K' по величине будет равна скорости v стержня 1 и направлена в противоположную сторону. Скорость $v_{x'}$ стержня 2, движущегося относительно системы K' , в системе отсчета K также равна v . Если ось x' вдоль движения стержня 1, по проекции скоростей $v_{x'}$ и v_0 на эту ось будут отрицательны. Поэтому скорость стержня движущегося относительно системы K' , будет равна

$$v_{\text{отн}} = \frac{-v - v}{1 + v_0 v_{x'} / c^2}.$$

$$\text{Следовательно } \ell = \ell_0 \sqrt{1 - 4v^2 c^2 / (c^2 + v^2)^2} = \ell_0 \frac{c^2 - v^2}{c^2 + v^2} \approx 38 \text{ см}.$$

Ответ: $\ell \approx 38 \text{ см}$.

5.4. При движении тела его продольные размеры уменьшились в $n = 2$ раза. Во сколько изменилась масса тела?

Решение.

При движении частицы со скоростью v ее релятивистская масса m увеличивается по сравнению с массой покоя m_0 в $\sqrt{1 - v^2 / c^2}$ раз:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

Известно, что при переходе от одной системы отсчета к другой размеры тела изменяются, при этом лоренцево сокращение происходит только в направ-

лении движения. Если в системе отсчета, связанной с телом, его продольные размеры имеют некоторые значения ℓ_0 , то в системе отсчета, относительно которой тело движется со скоростью v , они сокращаются в $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ раз:

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

Используя условие задачи, получаем $\ell_0/n = \ell_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}$. Отсюда находим $\sqrt{1 - (v/c)^2} = 1/n$; $m = n \cdot m_0$.

Ответ: масса тела увеличилась в 2 раза.

5.5. Масса Солнца равна $M = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ кг}$. Солнце в течении года излучает энергию $E = 12,6 \cdot 10^{23} \text{ Дж}$. За какое время масса Солнца уменьшится вдвое?

Решение.

Массу Солнца, теряемую им при излучении, можно оценить по формуле Эйнштейна: $E = mc^2$. Если в течении года Солнце получает энергию E , то за одну секунду оно в среднем теряет массу $\Delta m = \frac{E}{T \cdot c^2} \approx 4,4 \cdot 10^9 \text{ кг/с}$, где T - продолжительность года, выраженная в секундах. Следовательно, масса Солнца уменьшится вдвое за время $t = \frac{M}{2\Delta m} = \frac{MTc^2}{2E} \approx 7,1 \cdot 10^{12} \text{ лет}$.

Ответ: $t \approx 7,1 \cdot 10^{12} \text{ лет}$.

5.6. Электрон движется со скоростью $v = 0,9c$. Вычислить в процентах, какая ошибка будет сделана, если кинетическую энергию частицы определять по формуле классической механики.

Решение.

При скоростях близких к скорости света, кинетическая энергия частицы может быть вычислена по формуле $T = mc^2 - m_0c^2$ (где m_0 - масса покоя электрона), которая с учетом выражения для релятивистской массы может быть записана в виде

$$T' = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right).$$

В классической механике кинетическую энергию находят по формуле

$$T = \frac{m_0 v^2}{2}.$$

Следовательно, относительная ошибка, которая будет допущена при определении кинетической энергии частицы по формуле классической механики,

$$\eta = \frac{T - T'}{T} = 1 - \frac{0,5 m_0 v^2}{m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right)} = 1 - \frac{v^2/c^2}{2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right)} \approx 0,69.$$

Ответ: $\eta \approx 0,69$.

5.3. Задачи для самостоятельного решения

1. На космическом корабле-спутнике находятся часы, синхронизированные до полета с земными. Скорость v_0 спутника составляет 7,9 км/с. На сколько отстанут часы на спутнике по измерениям земного наблюдателя по своим часам за время 0,5 года? (Ответ: 0,57с.)

2. Лодочник под мостом уронил в воду багор. Через время τ , находясь на расстоянии L от моста, он обнаружил потерю и, повернув назад, догнал багор на расстоянии ℓ от моста. Время и расстояние приведены в системе «берег». Какова скорость реки? Получите релятивистский ответ и из него нерелятивистское приближение. (От-

вет: $v = \frac{L \tau c^2}{\ell(\ell + 2L)} \left(\sqrt{1 + \frac{\ell^3(\ell + 2L)}{(L \tau c)^2}} - 1 \right); \quad v = \ell^2 / 2L \tau.$)

3. Фотонная ракета движется относительно Земли со скоростью $v=0,6$ с. Во сколько раз замедлится ход времени в ракете с точки зрения земного наблюдателя? (Ответ: 1,25.)

4. В системе К находится квадрат, сторона которого параллельна оси x' . Определить угол φ между его диагоналями в системе К, если система К' движется относительно К со скоростью $v = 0,95c$. (Ответ: $\varphi = 72^{\circ}66'$.)

5. С космического корабля, удаляющегося от Земли со скоростью $0,66c$, под прямым углом к направлению полета (с точки зрения наблюдателя, находящегося на борту корабля) запущен беспилотный модуль со скоростью $0,82c$. Чему равна скорость модуля и под каким углом к направлению движения первого космического корабля он летит с точки зрения наблюдателя на Земле? (Ответ: $0,9c$; 93°)

6. Ион, вылетев из ускорителя, испустил фотон в направлении своего движения. Определить скорость фотона относительно ускорителя, если скорость v иона относительно ускорителя равна $0,8c$. (Ответ: c .)

7. Два ускорителя выбрасывают навстречу друг другу частицы со скоростями $|v|=0,9c$. Определить относительную скорость сближения частиц в системе отсчета, движущейся вместе с одной из частиц. (Ответ: $0,994c$.)

8. Масса Солнца ежесекундно уменьшается на $\Delta m = 4 \cdot 10^6$ т/с. Какое количество энергии излучает Солнце за 1 ч? Какое количество гидроэлектростанций мощностью $N = 2,1 \cdot 10^6$ Вт могло бы выбрасывать столько же энергии за час? (Ответ: $1,3 \cdot 10^{30}$ Дж; $1,7 \cdot 10^{17}$.)

9. С какой скоростью v движется частица, если ее релятивистская масса в три раза больше массы покоя? (Ответ: $0,943c$.)

10. На сколько процентов релятивистская масса частицы больше массы покоя при скорости $v=30$ Мм/с? (Ответ: $0,5\%$.)

11. В лабораторной системе отсчета одна из двух одинаковых частиц покоится, другая движется со скоростью $v=0,8c$ по направлению к покоящейся частице. Определить: 1) релятивистскую массу движущейся частицы в лабораторной системе отсчета; 2) скорость частиц в системе отсчета, связанной с центром инерции системы; 3) релятивистскую массу частиц в

системе отсчета, связанной с центром инерции. (Ответ: 1) $1,67 m_0$; 2) $0,5$ с; 3) $1,15 m_0$.)

12. Определить, на сколько должна увеличиться полная энергия тела, чтобы его релятивистская масса возросла на $\Delta m = 1$ г? (Ответ: 90 ТДж .)

13. Известно, что объем воды в океане равен $1,37 \cdot 10^9 \text{ км}^3$. Определить, на сколько возрастет масса воды в океане, если температура воды повысится на $\Delta t = 1$ °С. Плотность воды в океане принять равной $\rho = 1,03 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. (Ответ: $6,57 \cdot 10^7 \text{ кг}$.)

14. Во сколько раз релятивистская масса протона больше релятивистской массы электрона, если обе частицы имеют одинаковую кинетическую энергию $T = 1$ ГэВ? (Ответ: $1,94$.)

15. При какой скорости v кинетическая энергия любой частицы вещества равна ее энергии покоя? (Ответ: $2,6 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.)

16. Две релятивистские частицы движутся навстречу друг другу с одинаковыми (в лабораторной системе отсчета) кинетическими энергиями, равными их энергии покоя. Определить: 1) скорости частиц в лабораторной системе отсчета; 2) относительную скорость сближения частиц (в единицах c); 3) кинетическую энергию одной из частиц в системе отсчета, связанной с другой частицей. (Ответ: 1) $0,866c$; 2) $0,9897c$; 3) $6 m_0 c^2$.)

17. Кинетическая энергия релятивистской частицы равна ее энергии покоя. Во сколько раз возрастет импульс частицы, если ее кинетическая энергия увеличится в $n = 4$ раза? (Ответ: $2,82$.)

18. Частица с кинетической энергией $T = m_0 c^2$ налетает на другую такую же частицу, которая в лабораторной системе отсчета покоится. Найти суммарную кинетическую энергию T' частиц в системе отсчета, связанной с центром инерции системы частиц. (Ответ: $0,511 m_0 c^2$.)